Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Electrónica y Circuitos.
Ec1421 Señales y Sistemas.

Análisis de Señales Aleatorias
Ejercicios Resueltos:

1. **Suponga que *x(t)* y *v(t)* son dos procesos aleatorios (P.A) estacionarios en sentido amplio (WSS), con función de auto correlación $\boldsymbol{R_{xx}(\tau) = 2e^{-|\tau|}}$; $\boldsymbol{R_{vv}(\tau) = e^{-3|\tau|}}$**

a. Usando *x(t)* y *v(t),* muestre como construiría un P.A g(t) cuya función de auto correlación $\boldsymbol{R_{gg}(\tau)}$ es: $\boldsymbol{R_{gg}(\tau) = R_{xx}(\tau)R_{vv}(\tau)}$.

Puede usar el siguiente par de transformada: $e^{-\beta|\tau|} \Leftrightarrow \frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$

Asumiendo que x(t) y v(t) son estadísticamente independientes; g(t) se puede representar como:

$$g(t) = x(t) \cdot v(t)$$
$$R_{gg}(\tau) = E[x(t+\tau)v(t+\tau)x(t)v(t)]$$
$$R_{gg}(\tau) = E[x(t+\tau)x(t)]E[v(t+\tau)v(t)]$$
$$R_{gg}(\tau) = R_{xx}(\tau)R_{vv}(\tau)$$

b. *w(t)* denota un P.A WSS con función de auto correlación $\boldsymbol{R_{ww}(\tau) = \delta(\tau)}$. Suponga que *w(t)* es la entrada a un sistema causal, LIT de primer orden, cuya ecuación diferencial es: $\boldsymbol{\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = bw(t)}$, determine el valor de a y b para que la auto correlación de la salida *x(t)* sea $\boldsymbol{R_{xx}(\tau) = 2e^{-|\tau|}}$.

De la ecuación diferencial: $H(j\omega) = \frac{b}{a+j\omega}$

La transformada de Fourier de $R_{xx}(\tau) = 2e^{-|\tau|}$ es: $S_{xx}(j\omega) = \frac{4}{1+\omega^2}$

Sabemos que $S_{xx}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \cdot S_{ww}(j\omega)$

Dado que $R_{ww}(\tau) = \delta(\tau),\ S_{ww}(j\omega) = 1$

Por lo que: $S_{xx}(j\omega) = |H(j\omega)|^2$

$$\frac{4}{1+\omega^2} = \left|\frac{b}{a+j\omega}\right|^2$$
$$\frac{4}{1+\omega^2} = \frac{b^2}{a+\omega^2}$$

Por lo que $a = 1$ y $b = 2$

c. **Es posible tener un proceso estacionario en sentido amplio *z(t)* cuya función de auto correlación sea $R_{zz}(\tau) = R_{xx}(\tau) * R_{vv}(\tau)$, i.e., $R_{zz}(\tau)$ es el resultado de convolucionar $R_{xx}(\tau)$ y $R_{vv}(\tau)$. Halle la respuesta en frecuencia del filtro *H(jω)* necesario para obtener el P.A WSS *z(t)* cuando la entrada al filtro *H(jω)* es *w(t)* ($R_{ww}(\tau) = \delta(\tau)$).**

$$R_{zz}(\tau) = R_{xx}(\tau) * R_{vv}(\tau)$$
$$S_{zz}(\omega) = S_{xx}(\omega) \cdot S_{vv}(\omega)$$

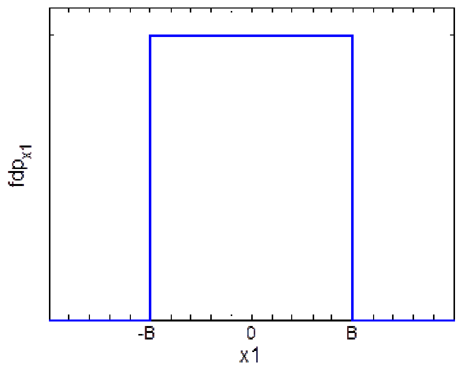
A la salida del filtro se tiene: $S_{zz}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{ww}(\omega)$

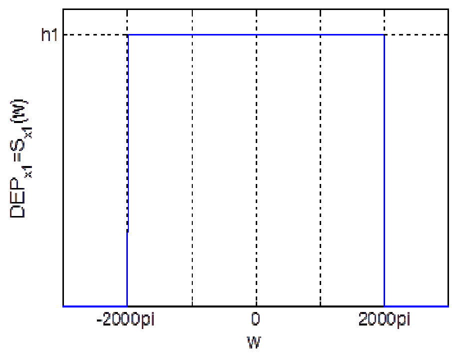
Dado que $R_{ww}(\tau) = \delta(\tau)$, $S_{ww}(j\omega) = 1$; $S_{zz}(j\omega) = |H(j\omega)|^2$

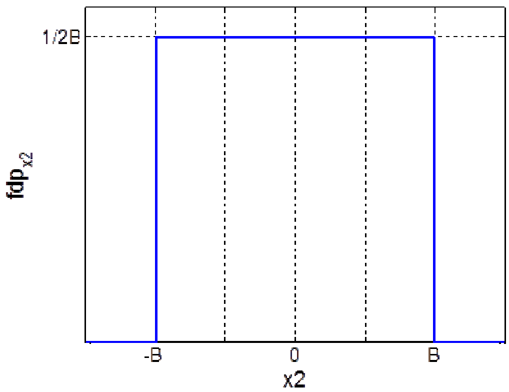
$$\frac{4}{1+\omega^2}\frac{6}{9+\omega^2} = |H(j\omega)|^2$$
$$\frac{4}{(1+\omega^2)}\frac{6}{(9+\omega^2)} = H(j\omega)H(-j\omega)$$

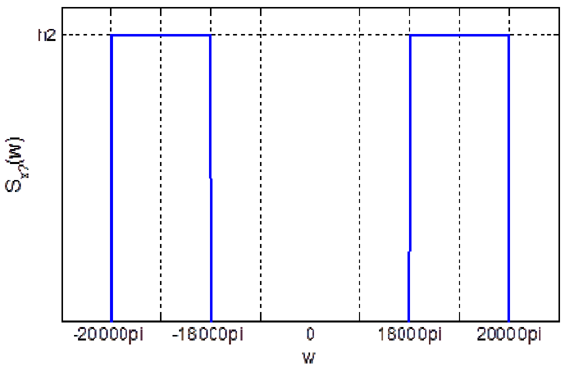
$$H(j\omega) = \frac{2\sqrt{3}}{(1+j\omega)(3+j\omega)}$$

2. **Sea un proceso ergódico (PE) x_1(t), uniformemente distribuido entre –B y B con una DEP constante para el rango de $-2000\pi < \omega < 2000\pi$ rad/seg . Sea el PE x_2(t), independiente de x_1(t), uniformemente distribuido entre –B y B y con DEP constante para el rango de $18000\pi < |\omega| < 20000\pi$ rad/seg.**









Determine:

a. **Obtenga B si se conoce que la potencia promedio total de $x_2(t)$ es igual a 1 $Watt$: $P_{promtotalX2} = 1Watt$.**

Como el proceso es ergódico: $P_{promtotal} = E[{x_2}^2(t)] = 1$

$$\therefore\ P_{promtotalX2} = E[{x_2}^2(t)] = E[x_2(t)]^2 + {\sigma_{x2}}^2 = 1Watt$$

$$E[x_2(t)]^2 = 0$$

$$E[{x_2}^2(t)] = {\sigma_{x2}}^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(2B)^2}{12}$$

$$B = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$$

Con el valor de ${\sigma_{x2}}^2$ es posible obtener el valor de h_2 en la DEP de $x_2(t)$.

$$1 = 2\left[\frac{1}{2\pi}\int_{18000\pi}^{20000\pi} h_2 dw\right]$$

$$h_2 = 5 \times 10^{-4}$$

$$h_1 = 5 \times 10^{-4}$$

b. **Sea $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$, determine si es posible o no que y(t), este uniformemente distribuido entre -2B y 2B. Utilice la potencia como criterio de su análisis.**

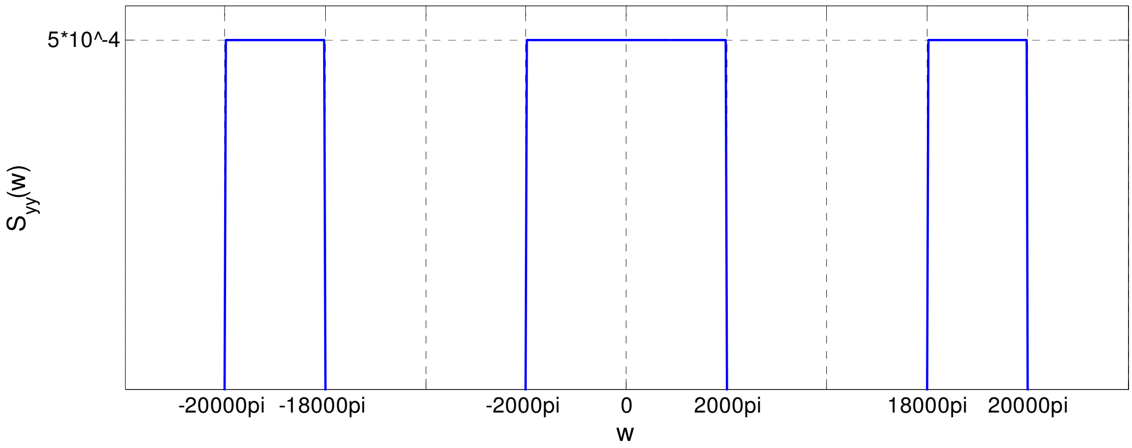
Calculemos la autocorrelación de $y(t)$

$$R_{yy}(\tau) = R_{x1x1}(\tau) + R_{x2x2}(\tau) + \cancel{E[x_1(t)]E[x_2(t)]} + \cancel{E[x_2(t)]E[x_1(t)]}$$

$$\therefore\ R_{yy}(\tau) = R_{x1x1}(\tau) + R_{x2x2}(\tau)$$

$$S_{yy}(w) = S_{x1x1}(w) + S_{x2x2}(w) S_{yy}(w) = S_{x1x1}(w) + S_{x2x2}(w)$$

Grafiquemos $S_{yy}(w)$



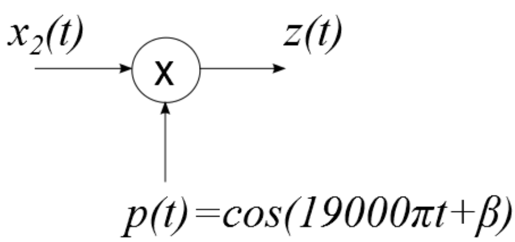
$$P_{promtotal} = E[{x_1}^2(t)] + E[{x_2}^2(t)] = 2Watt$$

Lo que debe coincidir con: ${\sigma_y}^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

$$E[y\ \ ^2(t)] = {\sigma_y}^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(4\sqrt{3})^2}{12} = 4 \neq 2$$

Por lo que no es posible que el proceso $\boldsymbol{y(t) = \ x_1(t) + x_2(t)}$ tenga una FDP Uniforme entre –2B y 2B.

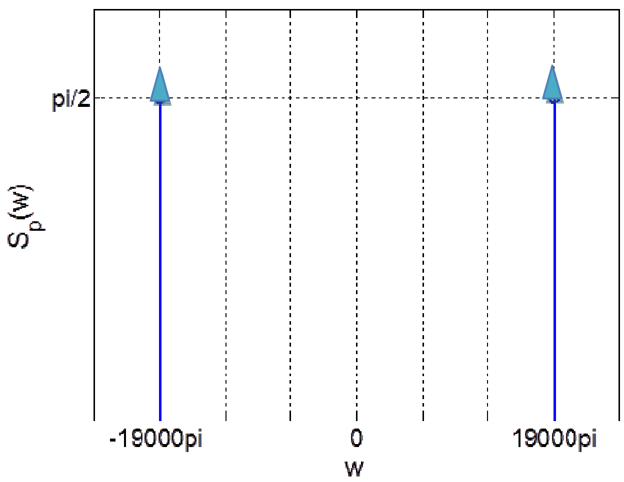
c. Sea $\boldsymbol{z(t) = \ x_2(t)\cos\left(19000\pi t + \beta\right)}$, con β uniformemente distribuido entre $\boldsymbol{[-\pi, \pi]}$. Determine la expresión matemática de la DEP de z(t) y grafíquela detalladamente . Asuma que el PE sinusoidal es independiente de x_2(t)



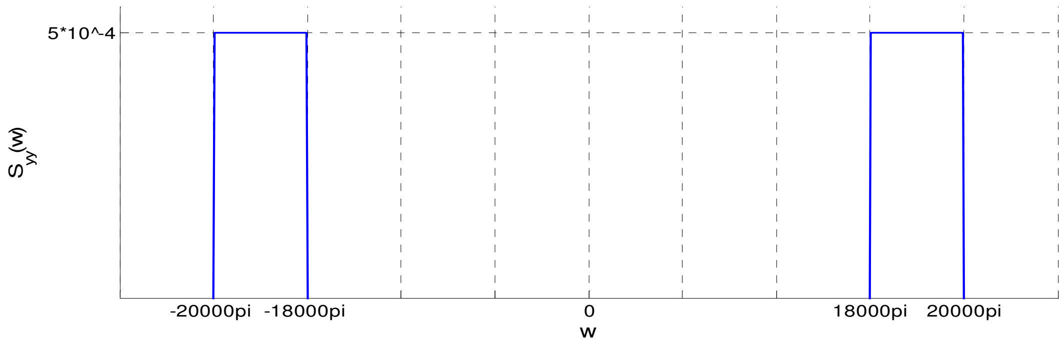
Se sabe que si $P(t)$ tiene una fdp uniforme entre $[-\pi, \pi]$:

$E[P(t)] = 0$, y $R_{pp}(\tau) = \frac{1}{2}\cos(19000\pi\tau)$ ∴

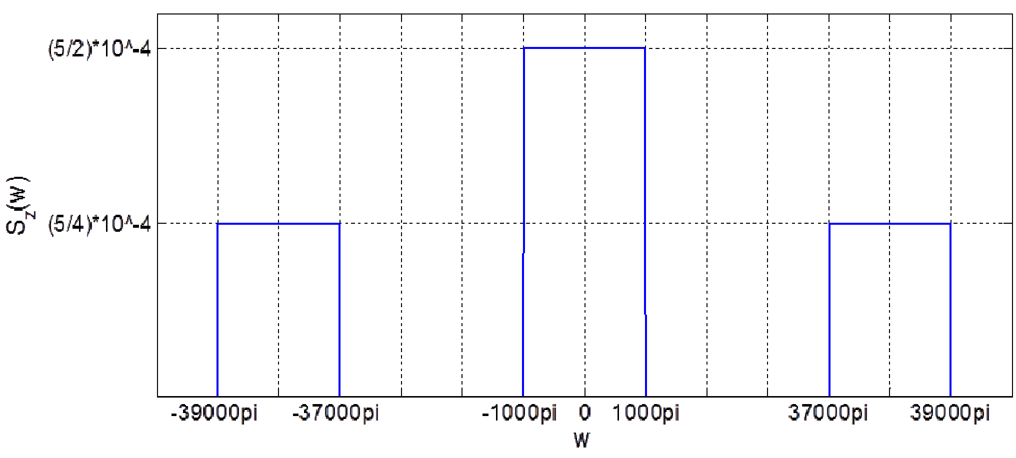
$$S_p(w) = \frac{\pi}{2}\delta(w - 19000\pi) + \frac{\pi}{2}\delta(w + 19000\pi)$$



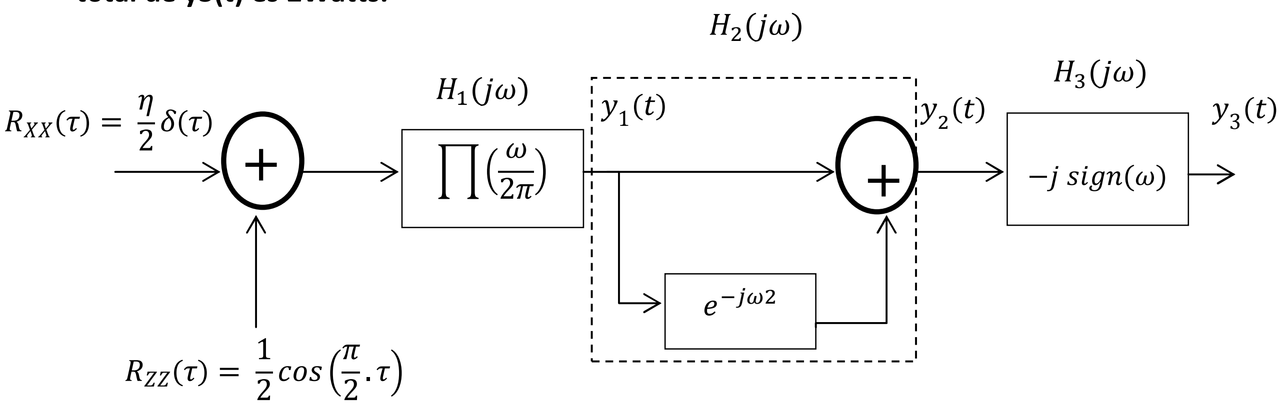
$$S_{x2}(w) = 5\times10^{-4}\Pi\left(\frac{w-19000\pi}{2000\pi}\right) + 5\times10^{-4}\Pi\left(\frac{w+19000\pi}{2000\pi}\right)$$



$$S_z(w) = \frac{1}{2\pi}S_p(w) * S_{x2}(w)$$
$$= \frac{5\times10^{-4}}{4}\left[\Pi\left(\frac{w-38000\pi}{2000\pi}\right) + \Pi\left(\frac{w}{2000\pi}\right) + \Pi\left(\frac{w}{2000\pi}\right) + \Pi\left(\frac{w+38000\pi}{2000\pi}\right)\right]$$



3. **Considere un sistema LIT, como el que se muestra a continuación, donde los procesos x(t) y z(t) son estacionarios en sentido amplio (WSS), no correlacionados y la potencia promedio total de y3(t) es 2Watts.**



<u>Determine:</u>

a. **Escriba la expresión matemática y grafique la densidad espectral de $y_1(t)$ en función de η .**

$$R_{yy}(\tau) = R_x(\tau) + R_z(\tau) + R_{xz}(\tau) + R_{zx}(\tau)$$

Se sabe que:

$$R_{xz}(\tau) = R_{zx}(\tau) = 0$$

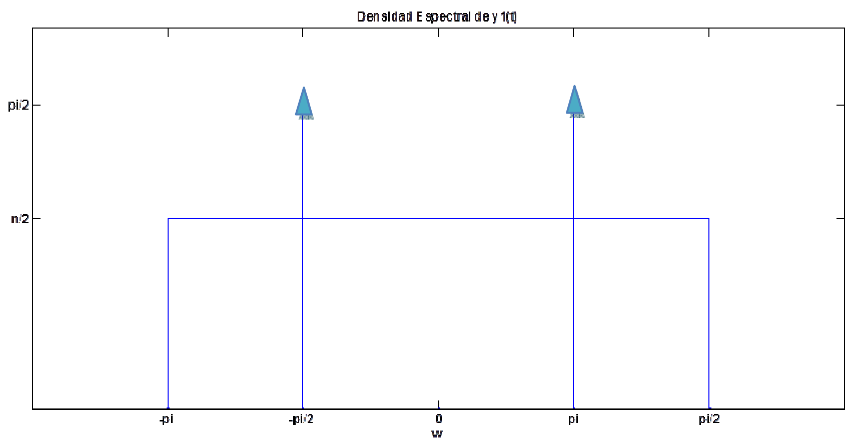
Luego:

$$R_{yy}(\tau) = R_x(\tau) + R_z(\tau)$$

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) + S_z(\omega)$$

$$S_{y_1}(\omega) = S_y(\omega)|H_1(j\omega)|^2$$

$$S_{y_1}(\omega) = \frac{\eta}{2}\prod\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) + \frac{\pi}{2}\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)$$



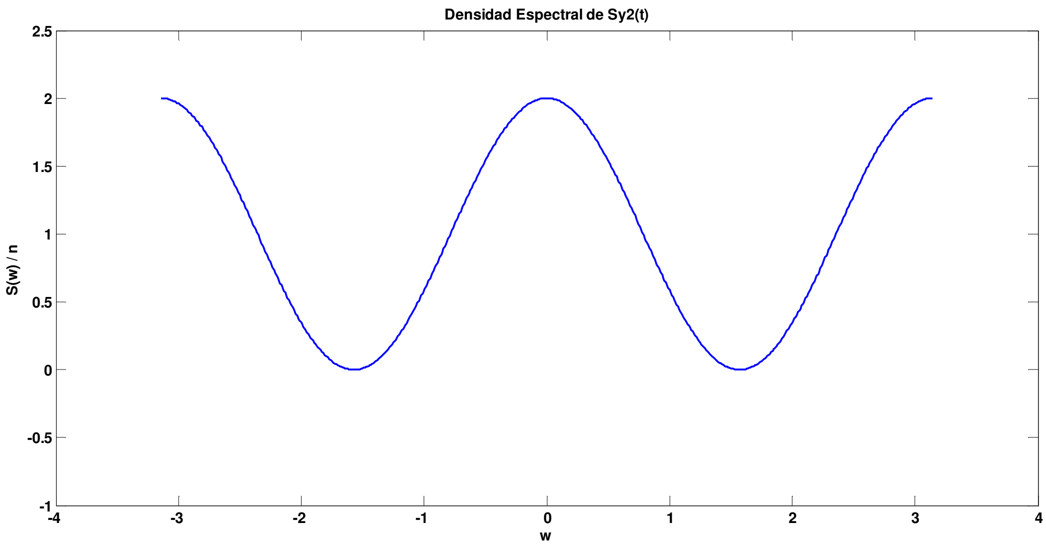
b. Escriba la expresión matemática y grafique la densidad espectral de $y_2(t)$ en función de η .

$$H_2(j\omega) = 1 + e^{-2j\omega} = 1 + \cos(2\omega) - j\sin(2\omega)$$

$$|H_2(j\omega)|^2 = (1+\cos(2\omega))^2 + \sin(2\omega)^2 = 1 + 2\cos(2\omega) + \cos^2(2\omega) + \sin^2(2\omega)$$

$$|H_2(j\omega)|^2 = 2 + 2\cos(2\omega) = 4\cos^2(\omega)$$

$$S_{y_2}(\omega) = S_{y_1}(\omega)|H_2(j\omega)|^2 = 4\cos^2(\omega)\frac{\eta}{2}\prod\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = 2\eta\cos^2(\omega)\prod\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

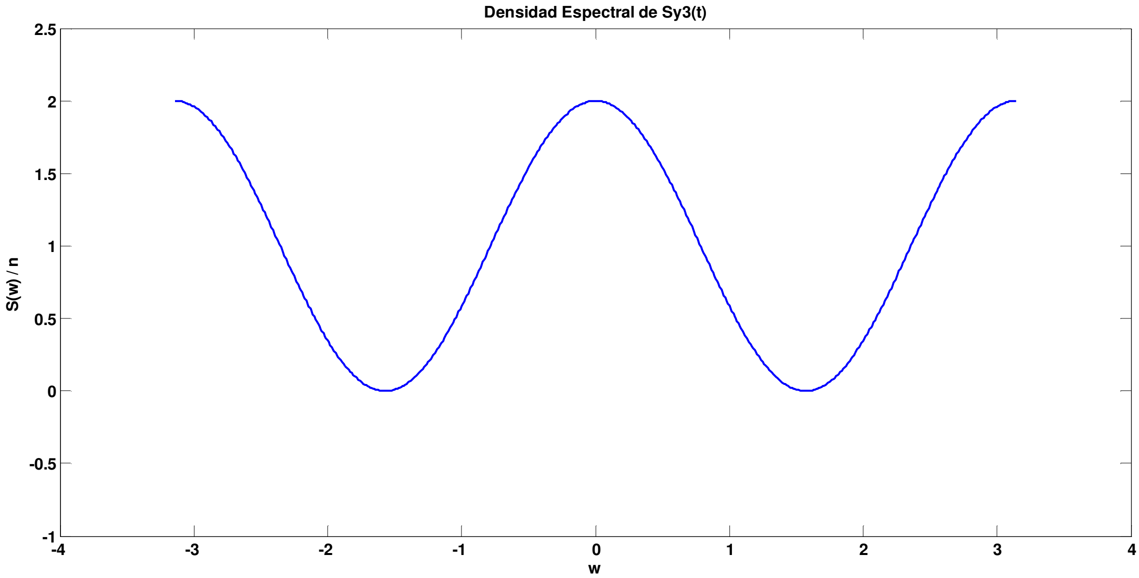


c. Escriba la expresión matemática y grafique la densidad espectral de $y_3(t)$ en función de η .

$$H_3(j\omega) = -j\,\mathrm{sing}(\omega)$$

$$|H_3(j\omega)|^2 = 1$$

$$S_{y_3}(\omega) = S_{y_2}(\omega)|H_3(j\omega)|^2 = S_{y_2}(\omega) = 4\cos^2(\omega)\frac{\eta}{2}\prod\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = 2\eta\cos^2(\omega)\prod\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$



d. **Calcule el valor de η.**

Se sabe que la potencia promedio total es 2 Watt:

$$P_{promedio_{total}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{y_3}(\omega)\,dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\eta\cos^2(\omega)\,dw$$

$$P_{promedio_{total}} = \frac{\eta}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(\omega)\,dw = \frac{\eta}{\pi}4\pi = \eta$$

$$\eta = 2$$

e. **Calcule la potencia promedio total de $y_1(t)$.**

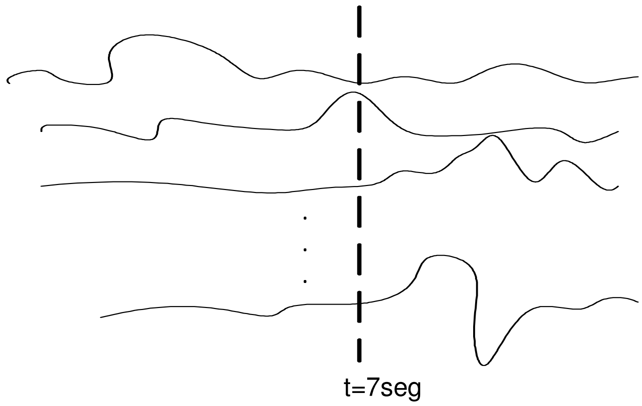
$$P_{y_1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{y_1}(\omega)\,dw$$

$$P_{y_1} = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dw + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{2}\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)dw + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{2}\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)dw\right]$$

$$P_{y_1} = \frac{1}{2\pi}\left[\pi-(-\pi)+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2\pi}[2\pi+\pi] = \frac{3}{2}\,Watt$$

4. **Se define el proceso estocástico $\mathbf{x(t) = A - Bt}$ donde A y B son dos variables aleatorias Gausseanas de valor promedio igual a cero y desviación estándar $\boldsymbol{\sigma_A = \sigma_B = 0,5}$. Si se conoce que A y B son estadísticamente independientes, determine la probabilidad de que $\mathbf{x(t)}$ tome valores menores o igual a $\mathbf{0,3}$ para $\mathbf{t = 7seg}$. Analice si el proceso es WSS.**

$$x(t) = A - Bt$$



$$P(x(t) \leq 0{,}3)|_{t=7}$$

$$P(x(t) \leq 0{,}3) = 1 - P(x(t) > 0{,}3) = 1 - Q\left(\frac{0{,}3 - \mu_x}{\sigma_x}\right)$$

Debemos calcular el valor promedio en conjunto con la desviación estándar.

- $\mu_x = E[x(t)]$
  $\mu_x = E[A - Bt]$
  $\mu_x = E[A] - E[Bt]$
  $\mu_x = 0$

- $\sigma_x{}^2 = E[(x(t) - \mu_x)^2] = E[x(t)^2 - \cancel{\mu_x{}^2}]$
  $\sigma_x{}^2 = E[A^2] + E[B^2t^2] - 2E[ABt]$
  $\sigma_x{}^2 = \sigma_A{}^2 + \sigma_B{}^2 t^2 - 2\cancel{E[A]E[Bt]}$
  $\sigma_x{}^2 = 0{,}5^2 + 0{,}5^2 t^2)$
  $\sigma_x{}^2 = 0{,}25 \quad + (49/4)$; para t=7
  $\sigma_x{}^2 = 12{,}5$
  $\sigma_x = 3{,}54$

Nota: Con esto se cumple que la varianza es igual a la media estadística porque el promedio es igual a cero.

$$P(x(t) \leq 0{,}3) = 1 - Q\left(\frac{0{,}3}{3{,}54}\right) = 1 - Q(0{,}08485) \approx 1 - 0{,}4681$$

$$P(x(t) \leq 0{,}3) = 0{,}5319$$

¿Es el proceso WSS?

- $E[x(t)] = 0$
- $E[x(t)x(t+\tau)]$ → veamos si depende sólo de τ

$$R_{xx}(t, t+\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = E[(A - Bt)(A - B(t+\tau))]$$

$$R_{xx}(t, t+\tau) = E[A^2] + E[B^2 t(t+\tau)] - E[AB(2t+\tau)]$$

$$R_{xx}(t, t+\tau) = 0{,}5^2 + 0{,}5^2 t(t+\tau) - 0$$

$$R_{xx}(t, t+\tau) = 0{,}25 + 0{,}25t(t+\tau)$$

El proceso NO es WSS!! La función de autocorrelación depende de t

5. Sea z(t) = v(t) - v(t+T), donde v(t), es un proceso aleatorio estacionario no periódico y T es una constante. Determine el valor promedio y la varianza de z(t) en función de la autocorrelación de v(t) (Rvv(τ))

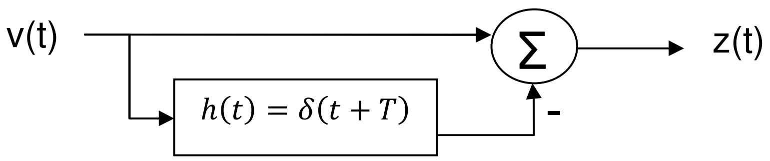


Figura 1.

$$z(t) = v(t) - v(t+T)$$

$$R_{zz}(\tau) = E[z(t)z(t+\tau)] = E[(v(t) - v(t+T))(v(t+\tau) - v(t+\tau+T))]$$

$$= E[v(t)v(t+\tau) - v(t)v(t+\tau+T) - v(t+T)v(t+\tau) + v(t+T)v(t+\tau+T)]$$

$$= E[v(t)v(t+\tau)] - E[v(t)v(t+\tau+T)] - E[v(t+T)v(t+\tau)] + E[v(t+T)v(t+\tau+T)]$$

$$R_{zz}(\tau) = 2R_{vv}(\tau) - R_{vv}(\tau+T) - R_{vv}(\tau-T)$$

Sabemos que:

$$R_{zz}(0) = E[z(t)^2]$$

$$\therefore \quad E[z(t)^2] = 2R_{vv}(0) - R_{vv}(T) - R_{vv}(-T)$$

$$E[z(t)^2] = 2[R_{vv}(0) - R_{vv}(T)]$$

Sabemos que :

$$para \qquad \tau \to \infty \qquad R_{zz}(\tau) = E[z(t)]^2$$

$$\therefore \qquad E[z(t)]^2 = R_{zz}(\infty) = 2R_{vv}(\infty) - R_{vv}(\infty + T) - R_{vv}(\infty - T) = 0$$

$$\therefore \qquad E[z(t)] = 0$$

$$\sigma_z^{\,2} = E[z(t)^2] - E[z(t)]^2 = 2[R_{vv}(0) - R_{vv}(T)]$$

6. Sean x(t) y y(t) dos señales determinísticas descritas a continuación:

$$\boldsymbol{x(t) = -\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + \sin(4\pi t) - \sin(6\pi t)}$$
$$\boldsymbol{y(t) = -\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right) - 3\sin(4\pi t) + \cos(6\pi t)}$$

Determine:

a. La Autocorrelación de x(t)

Sea:

$$x(t) = \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4} + \pi\right) + \sin(4\pi t) + \sin(6\pi t + \pi)$$
$$x(t) = \cos\left(2\pi t + \frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(6\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Calculando la autocorrelación de una señal determinística, es decir, la autocorrelación como promedio temporal de una señal de potencia:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_T x(t).x(t+\tau)dt;$$

se obtiene

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2}\cos(2\pi\tau) + \frac{1}{2}\cos(4\pi\tau) + \frac{1}{2}\cos(6\pi\tau)$$

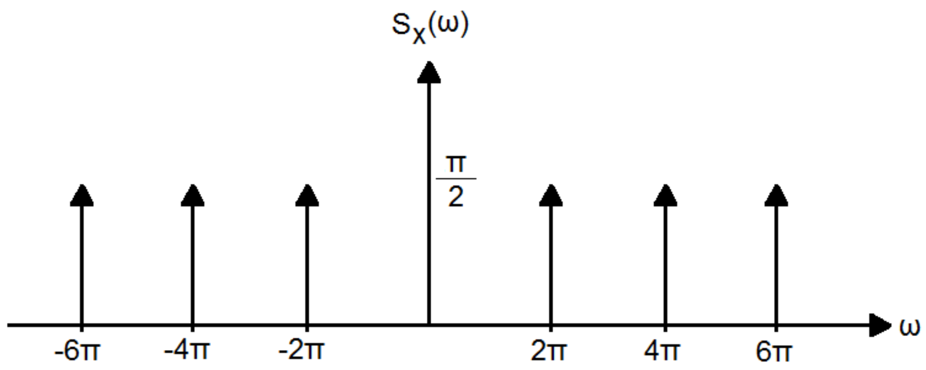
b. La Autocorrelación de y(t)

De forma similar a la pregunta anterior se obtiene:

$$R_{yy}(\tau) = \frac{1}{2}\cos(2\pi\tau) + \frac{9}{2}\cos(4\pi\tau) + \frac{1}{2}\cos(6\pi\tau)$$

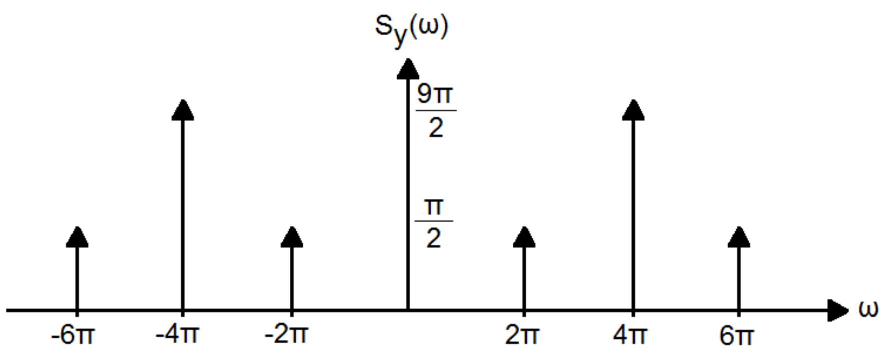
c. La Densidad espectral de potencia de x(t).

$$DEP_x = S_x(\omega) = F\{R_{xx}(\tau)\}$$
$$= \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+2\pi)+\delta(\omega-2\pi)] + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+4\pi)+\delta(\omega-4\pi)] + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+6\pi)+\delta(\omega-6\pi)]$$



d. La Densidad espectral de potencia de y(t).

$$DEP_y = S_y(\omega) = F\{R_{yy}(\tau)\}$$
$$= \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+2\pi)+\delta(\omega-2\pi)] + \frac{9\pi}{2}[\delta(\omega+4\pi)+\delta(\omega-4\pi)] + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+6\pi)+\delta(\omega-6\pi)]$$



e. La Potencia de x(t)

$$P_{x(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)d\omega = \frac{3}{2}Watts$$

f. La Potencia de y(t)

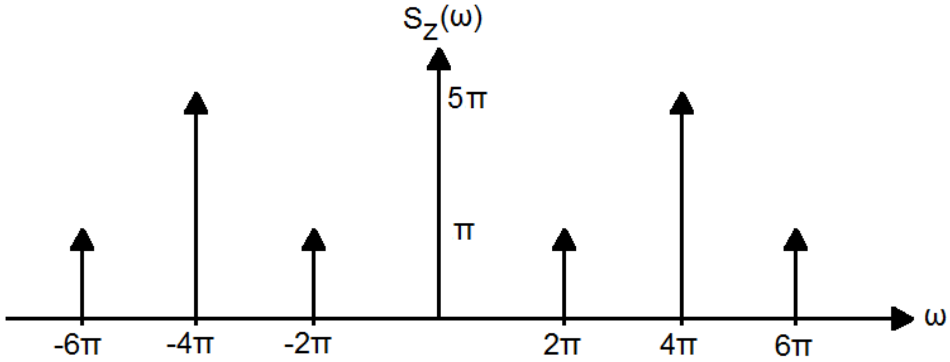
$$P_{y(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega)d\omega = \frac{11}{2}Watts$$

g. La Potencia de z(t)=x(t) + y(t)

$$P_{z(t)} = P_{x(t)} + P_{y(t)} = \frac{3}{2}Watts + \frac{11}{2}Watts = 7Watts$$

h. La Densidad espectral de potencia de z(t).

$$S_z(\omega) = S_x(\omega) + S_y(\omega)$$



7. Para el sistema mostrado en la Figura2, se sabe que los procesos aleatorios X(t) y Z(t), son procesos estacionarios en sentido amplio, no correlacionados, X(t) es un proceso gaussiano y tiene como función de autocorrelación $R_{xx}(\tau) = 9 + \frac{1}{2}\delta(\tau)$; y $Z(t) = \cos(10t)$

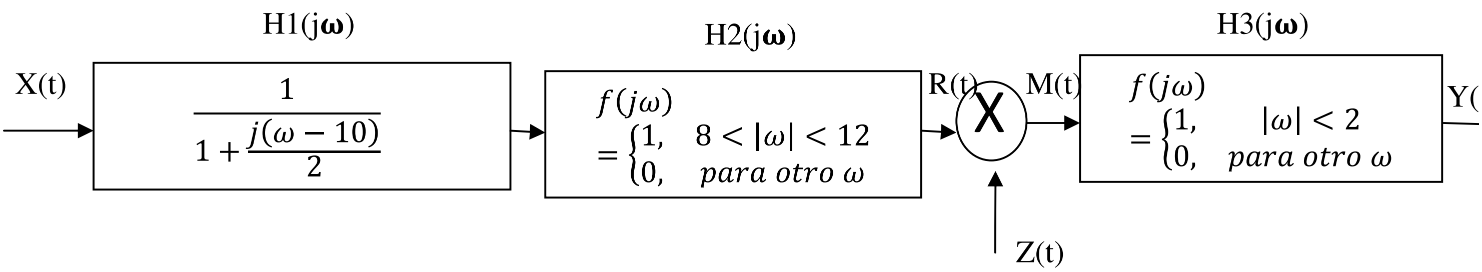


Figura 2.

Determine:

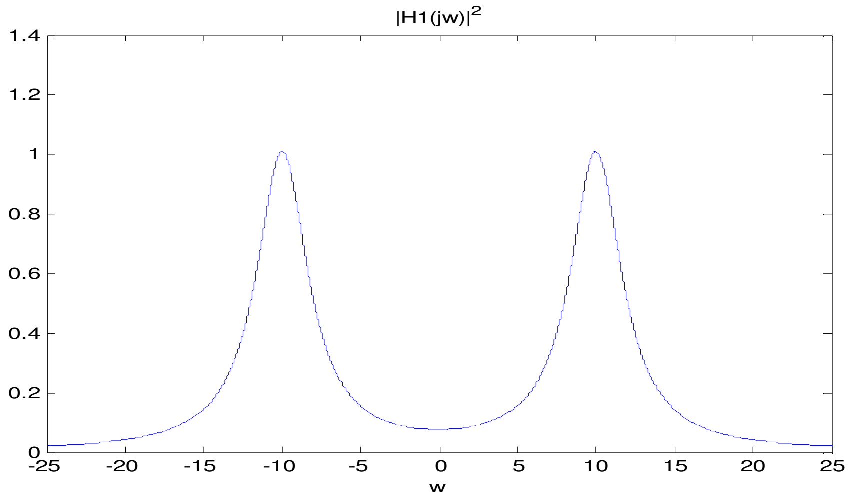
a. La expresión analítica de h1(t).

$$h_1(t) = 4e^{-2t}\cos(10t)u(t)$$

b. La grafica detallada de la densidad espectral de potencia de H1(jω)

$$H_1(j\omega) = \frac{2}{2+j(\omega+10)} + \frac{2}{2+j(\omega-10)}$$

$$|H_1(j\omega)|^2 = \frac{4}{4+(\omega+10)^2} + \frac{4}{4+(\omega-10)^2}$$



c. La gráfica y expresión analítica de la densidad espectral de potencia de la salida del sistema.

Como el sistema de la figura2 no es LTI, se debe estudiar el paso de la señal de entrada por cada una de las etapas del sistema e ir observando la densidad espectral resultante de cada una de ellas.

$$S_R(\omega) = S_x(\omega).|H_1(j\omega)|^2 |H_2(j\omega)|^2 = S_x(\omega).|H_{12}(j\omega)|^2$$

$$S_x(\omega) = 18\pi\delta(\omega) + \frac{1}{2}$$

$$|H_{12}(j\omega)|^2 = \left[\frac{4}{4+(\omega+10)^2}\right]\prod\left(\frac{\omega+10}{4}\right) + \left[\frac{4}{4+(\omega-10)^2}\right]\prod\left(\frac{\omega-10}{4}\right)$$

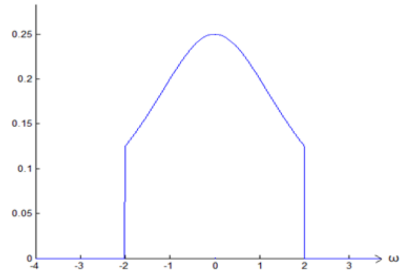
$$S_R(\omega) = \left[\frac{2}{4+(\omega+10)^2}\right]\prod\left(\frac{\omega+10}{4}\right) + \left[\frac{2}{4+(\omega-10)^2}\right]\prod\left(\frac{\omega-10}{4}\right)$$

$$S_M(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[S_R(\omega) * \frac{\pi}{2}[\delta(\omega-10) + \delta(\omega+10)]\right]$$

$$S_Y(\omega) = S_M(\omega)\prod\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

$$\therefore \qquad S_Y(\omega) = \frac{1}{4+\omega^2}\prod\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

$S_Y(\omega)$



d. La potencia promedio total a la salida del sistema.

$$P_{prom-total} = \frac{1}{2\pi}\left[2\int_0^2 \frac{1}{4+\omega^2}d\omega\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}tg^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)\Big|_0^2\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi}{8}\right] = \frac{1}{16}$$

8. La señal aleatoria X(t)=4cos(6000πt+φ); con φ uniformemente distribuida entre –π,π ; pasa por el sistema de la figura 3.

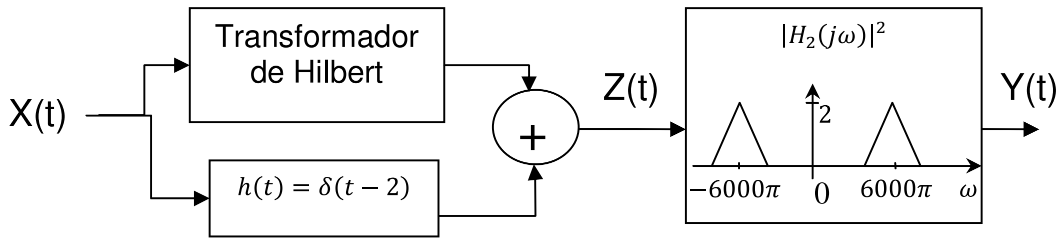


Figura. 3

Determine:

a. Autocorrelación de Z(t).

$h_1(t) = \dfrac{1}{\pi t} + \delta(t-2) \xrightarrow{\Im} H_1(j\omega) = -jsgn(\omega) + e^{-j2\omega}$

$|H_1(j\omega)|^2 = [\cos(2\omega)]^2 + [-sgn(\omega) - \text{sen}(2\omega)]^2$

$|H_1(j\omega)|^2 = \cos^2(2\omega) + 1 + 2sgn(\omega)sen(2\omega) + \text{sen}^2(2\omega) = 2 + 2sgn(\omega)sen(2\omega)$

$S_Z(j\omega) = |H_1(j\omega)|^2 S_X(j\omega)$

X(t) es un proceso aleatorio, cuya variable $\boldsymbol{\theta}$ tiene una fdp uniforme entre [-π, π] su autocorrelación demostrada en clase es: $R_{xx} = \frac{A^2}{2}cos(\omega_0\tau)$

$R_x(\tau) = \dfrac{4^2}{2}\cos(6000\pi\tau) = 8\cos(6000\pi\tau)$

$R_x(\tau) \xrightarrow{\Im} S_x(j\omega) = 8\pi[\delta(\omega - 6000\pi) + \delta(\omega + 6000\pi)]$

$S_Z(j\omega) = |H_1(j\omega)|^2 S_X(j\omega)$

$S_Z(j\omega) = 8\pi[\delta(\omega - 6000\pi) + \delta(\omega + 6000\pi)][2 + 2sgn(\omega)sen(2\omega)]$

$S_Z(j\omega) = 16\pi[\delta(\omega - 6000\pi) + \delta(\omega + 6000\pi)]$

$R_Z(\tau) = 16\cos(6000\pi\tau) = 2R_x(\tau)$

b. Autocorrelación de Y(t).

$S_y(\omega) = |H_2(j\omega)|^2(2S_x(\omega))$

$S_x(\omega)$ esta dentro de la banda de paso H(j**ω**) para $\omega = \pm 6000\pi$ $|H_2(j\omega)| = 2$

$S_Y(\omega) = (2)^2 2S_x(\omega) = 8S_x(\omega)$

$R_y(t) = 8R_x(t) = 64Cos(6000\pi t)$

c. Potencia promedio, DC y AC de Y(t).

$P_{promedio} = R_Y(0) = 64 \quad Watts \quad = E[y(t)^2]$

Potencia DC de $y(t) = 0 \quad E[y(t)]^2 = 0 \quad \{S_Y(\omega);$ *no tiene una función delta en el origen*

Potencia AC de $y(t) = \sigma^2$

$\sigma^2 = E[y(t)^2] - E[y(t)]^2$

$\sigma^2 = 64 \quad watts$

9. Se tiene un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio y ergódico X(t) distribuido uniformemente y con densidad espectral de potencia como la mostrada en la Figura.4. Se sabe que el nivel DC de dicho proceso es positivo.

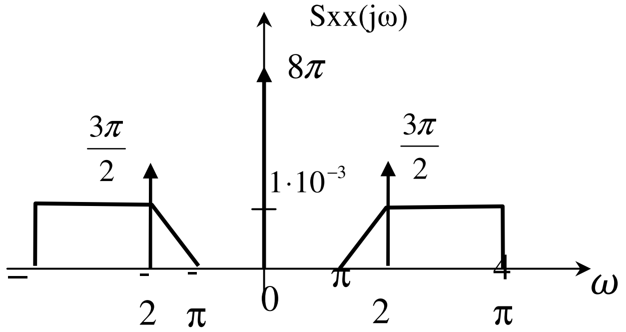


Figura. 4

a. Grafique con detalle la función de densidad de probabilidad, del proceso aleatorio X(t) (fdpX)

Del impulso centrado en el origen de $S_{xx}(jw)$ se obtiene la potencia DC

$$E[X]^2 = \frac{1}{2\pi} 8\pi = 4$$

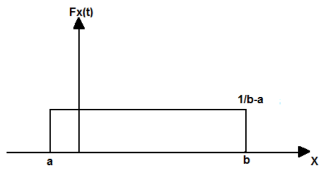
$$E[X] = 2$$

$$Potencia_{promedio} = E[X(t)^2] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(jw)dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{8\pi + 2\left[\frac{3\pi}{2} + 2\pi 10^{-3} + \frac{\pi}{2}10^{-3}\right]\right\}$$

$$E[X(t)^2] = 4 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}10^{-3} = 5{,}5025 \quad Watts$$

$$Potencia_{AC} = \sigma^2 = E[X(t)^2] - E[X(t)]^2 = 1.5025 \quad Watts$$

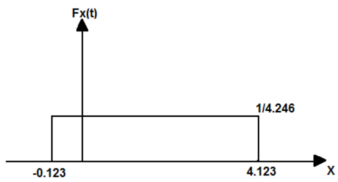


$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = 1{,}5025$$

$$E[X(t)] = \frac{b+a}{2} = 2 \Rightarrow \qquad b + a = 4$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones y 2 incógnitas:

b=4,123 a=-0.123



b. Determine el valor mínimo que puede tomar la señal X(t)

El valor mínimo que puede tomar la señal $X(t)$ es -0.123